

TAKMIČENJE IZ PREDMETA „TEORIJA ELEKTRIČNIH KOLA“

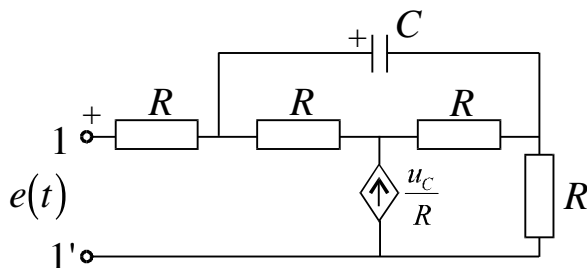
KRANEVO 18.5.2012. – 23.5.2012.

ZADATAK 2. – PRVA OBLAST

Na slici je prikazano čisto pasivno RC električno kolo sa jednim pristupom i sa naponski kontrolisanim strujnim izvorom. U trenutku $t=0$ kolo se priključuje na naponski generator elektromotorne sile:

$$e(t) = \begin{cases} 6e^{-t} \text{ [V]} & 0_+ \leq t \leq T_- \\ -6e^{-t} \text{ [V]} & T_+ \leq t < \infty \end{cases} \quad T = \ln 2, \text{ vremenski normalizovana vrednost.}$$

Ako je poznato $RC=1$, koristeći Damielov superpozicioni integral, odrediti vremensku funkciju promene napona na krajevima kondenzatora, $u_C(t)$



Napomena: Može se napisati:

$$e(t) = 6e^{-t}(h(t) - 2h(t-T)) \text{ V}, \quad h(t) - \text{Hevisajdova jedinična funkcija.}$$

Rešenje:

Oznake: I_1 struja kroz otpornik na ulazu, smer s leva na desno, I_2 struja kroz krajnji desni otpornik, smer odozgo prema dole, I_3 struja kroz srednji levi otpornik, smer s leva na desno, I_4 struja kroz srednji desni otpornik, smer s leva na desno, sCU_C struja kroz kondenzator, smer s leva na desno.

Delove napona eksitacije obeležimo sa:

$$e_{t_1} = 6e^{-t} \text{ [V]} \text{ za } 0_+ \leq t \leq T_-, \quad e_{t_2} = -6e^{-t} \text{ [V]} \text{ za } T_+ \leq t < \infty.$$

Najpre ćemo odrediti jediničnu karakteristiku napona na kondenzatoru, tj odziv ove veličine pri jediničnoj pobudnom naponu:

$$G_C(s) = U_C(s)_{|E(s)=\frac{1}{s}}$$

Pišemo sistem pet jednačina:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_2 - sCU_C, & I_3 &= I_4 - \frac{U_C}{R}, & I_1 &= I_2 - \frac{U_C}{R}, \\ \frac{1}{s} &= R(I_1 + I_2 + I_3 + I_4), & U_C &= R(I_3 + I_4). \end{aligned}$$

Prve tri jednačine koristimo za smene u preostale dve jednačine:

$$\frac{1}{s} = R \left(I_2 - \frac{U_C}{R} + I_2 + I_2 - sCU_C - \frac{U_C}{R} + I_2 - sCU_C \right) = 4RI_2 - 2(1 + sCR)U_C,$$

$$U_C = R \left(I_2 - sCU_C - \frac{U_C}{R} + I_2 - sCU_C \right) = 2RI_2 - (1 + 2sCR)U_C \quad \Rightarrow \quad RI_2 = (1 + sCR)U_C.$$

Konačno je:

$$U_C(s) = G_C(s) = \frac{1}{2s(1 + RCs)} = \frac{1}{2(1 + s)} \quad \Rightarrow \quad g_C(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}) \text{ V/V}.$$

Prvi način: traženo rešenje izračunavamo po delovima.

$$0 \leq t \leq \ln 2 \quad u_C(t) = et_1(0)g_C(t) + \int_0^t \frac{d et_1(x)}{dx} g_C(t-x) dx$$

$$u_C(t) = 3(1 - e^{-t}) - 3 \int_0^t e^{-x} (1 - e^{-t} e^x) dx = 3(1 - e^{-t}) - 3 \int_0^t (e^{-x} - e^{-t}) dx = 3 - 3e^{-t} + 3(e^{-x} + x e^{-t}) \Big|_0^t$$

$$u_C(t) = 3 - 3e^{-t} + 3e^{-t} + 3t e^{-t} - 3 = 3t e^{-t} \text{ [V]}.$$

$$\ln 2 \leq t < \infty$$

$$u_C(t) = et_1(0)g_C(t) + \int_0^{\ln 2} \frac{d et_1(x)}{dx} g_C(t-x) dx + [et_2(\ln 2) - et_1(\ln 2)]g_C(t - \ln 2) + \int_{\ln 2}^t \frac{d et_2(x)}{dx} g_C(t-x) dx$$

$$u_C(t) = 3 - 3e^{-t} + 3(e^{-x} + x e^{-t}) \Big|_0^{\ln 2} - 3(1 - 2e^{-t}) - 3(e^{-x} + x e^{-t}) \Big|_{\ln 2}^t$$

$$u_C(t) = 3(\ln 4 - t)e^{-t} \text{ [V]}.$$

Drugi način, korišćenje Hevisajdove funkcije:

$$u_C(t) = 3t e^{-t} \cdot h(t) + 3(\ln 4 - 2t)e^{-t} h(t - \ln 2) \text{ [V]}.$$